

1. Vypočítajte neurčité integrály rozkladom na súčet, resp. rozdiel tabuľkových integrálov:

a) $\int \frac{2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}{5 \cos^2 x} dx$, b) $\int \frac{3 + e^{-x} \cdot \sin x}{e^{-x}} dx$, c) $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$, d) $\int \frac{2tg^2 x + 5}{3 \sin^2 x} dx$,

e) $\int \frac{8 - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$, f) $\int \frac{1 + \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{1 - \cos 2x} dx$, g) $\int \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

2. Ukážte, že platí: a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + C$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$.

3. Použitím vzorcov v cvičení 2. vypočítajte integrály:

a) $\int \frac{3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$, b) $\int \frac{5}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$, c) $\int \frac{2}{\sqrt{x^2 - 5}} dx$, d) $\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2 + 2x^2}} dx$, e) $\int \frac{5}{\sqrt{9x^2 - 18}} dx$,

f) $\int \frac{4}{\sqrt{6 + 3x^2}} dx$.

Integrovanie substitučnou metódou je metóda, pri ktorej zavádzame novú premennú tak, aby po jej zavedení sme dostali funkciu, ktorú dokážeme integrovať.

1. integrovanie zloženej funkcie, ktorej vnútorná zložka je lineárna funkcia:

$$\int f(ax+b)dx = \left. \begin{array}{l} s: t = ax+b \\ dt = (ax+b)' dx \\ dt = a \cdot dx \\ dx = \frac{1}{a} dt \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int f(t) dt = \frac{1}{a} F(t) + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

1.1. $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \int (ax+b)^n \cdot a \cdot dx = \frac{1}{a} \int t^n dt = \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{(n+1)} + C = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)} + C$

Príklady: Vypočítajte neurčité integrály uvedeným postupom:

a) $\int (4x-3)^4 dx$, b) $\int (x+1)^{15} dx$, c) $\int (1-2x)^5 dx$, d) $\int (3-4x)^{\frac{3}{2}} dx$, e) $\int \frac{1}{(2x-7)^4} dx$,

f) $\int \frac{3}{(3x-5)^2} dx$, g) $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 9} dx$, h) $\int \frac{5}{x^2 + 4x + 4} dx$, i) $\int \sqrt{3-2x} dx$, j) $\int \sqrt[5]{(4x+9)^4} dx$,

k) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$, l) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-7}} dx$, m) $\int \frac{6}{\sqrt[4]{(5-6x)^3}} dx$.

1.2. $\int (ax+b)^{-1} dx = \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{a} \ln t + C = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$

Príklady: Vypočítajte neurčité integrály uvedeným spôsobom:

a) $\int (3x+4)^{-1} dx$, b) $\int \frac{1}{7x-9} dx$, c) $\int \frac{5}{x+2} dx$, d) $\int \frac{6}{5(1-2x)} dx$, e) $\int \frac{8}{7\left(2-\frac{3}{4}x\right)} dx$.

1.3. Na predchádzajúci prípad prevádzame integrály racionálnej lomenej funkcie s lineárnym menovateľom

Príklad: (delíme čitateľa menovateľom až po konštantný zvyšok) a) $\int \frac{6x^3 - 4x^2 + 2x - 3}{2x-1} dx$,

b) $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$, c) $\int \frac{2x-1}{x-2} dx$, d) $\int \frac{x}{x+4} dx$, e) $\int \frac{x^3}{x-1} dx$, f) $\int \frac{x^4}{x+3} dx$