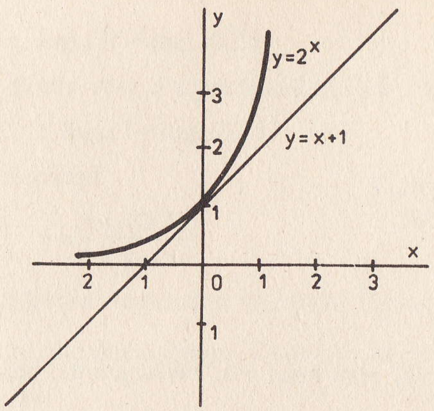
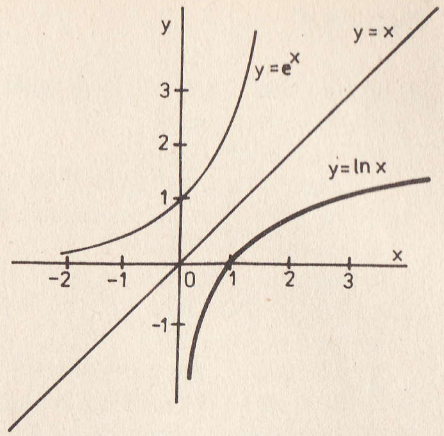


Obr. 1.44



Obr. 1.45

také číslo $e > 1$, aby graf exponenciálnej funkcie $y = e^x$ mal s príslušnou priamkou jediný spoločný bod (bude ním bod $[0; 1]$).

Dá sa vypočítať, že

$$e \doteq 2{,}718$$

Ide o iracionálne číslo (presnejšie $e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$), ktoré sa nazýva **Eulerovo číslo.**

Číslo e a exponenciálna funkcia $y = e^x$ majú veľký význam ako v teoretickej matematike, tak aj v aplikáciách. S funkciou $y = e^x$ sa často stretávame vo fyzike, chémii, biológii atď. Napríklad závislosť rastu počtu baktérií od času, závislosť barometrického tlaku od nadmorskej výšky sa vyjadrujú pomocou exponenciálnych funkcií so základom e.

Rovnako významná je logaritmická funkcia so základom e, t. j. funkcia $y = \log_e x$, ktorú obyčajne označujeme $y = \ln x$ (pozri obr. 1.45). Hovoríme o **prirodzenom logaritme** $\ln x$.

V predchádzajúcich článkoch sme sa často stretávali s logaritmami so základom 10 alebo s tzv. **dekadickými logaritmami,** ktoré majú význam pri numerických výpočtoch. V zápise „$\log_{10} x$" sa zvyčajne „10" vynecháva; stručnejšie píšeme len $\log x$, čítame „logaritmus x". Hodnoty dekadických a prirodzených logaritmov nájdete v tabuľkách, prípadne na niektorých typoch vreckových kalkulačiek.

Teraz si všimnime vzťah medzi $\log x$ a $\ln x$. Uvedieme a dokážeme vetu:

Veta!

Pre každé kladné reálne číslo x a pre všetky kladné reálne čísla y, z rôzne od jednej platí

$$\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$$

Dôkaz: Z definície logaritmu ihneď vyplýva platnosť vzťahu (pozri vetu 1 v článku 1.9)

$$x^{\log_y x} = x$$

Od výrazov v tomto vzťahu prejdeme k ich logaritmom pri základe z (vzťah logaritmujeme):

$$\log_z (y^{\log_y x}) = \log_z x$$

Podľa vety 3 z článku 1.10 ďalej dostaneme

$$\log_y x \,.\, \log_z y = \log_z x$$

čiže ($y \neq 1$, a teda $\log_z y \neq 0$)

$$\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$$

Túto vetu teraz použijeme na vyjadrenie vzťahu medzi $\log x$ a $\ln x$. Zvolíme $y = e$, $z = 10$. Potom

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

čiže

$$\boxed{\ln x = \frac{\log x}{\log e}} \Rightarrow \boxed{\log x = \log e \,.\, \ln x}$$

Ak zvolíme $y = 10$, $z = e$, dostávame

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

čiže

$$\boxed{\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}}$$

Platí $\ln 10 \doteq 2{,}30$, $\log e \doteq 0{,}43$, a teda $\boxed{\frac{1}{\log e} = 2{,}30}$

$$\ln x \doteq 2{,}30 \,.\, \log x$$

$$\log x \doteq 0{,}43 \,.\, \ln x$$

$$\log_{10} 3^x = \log_{10} 0{,}25$$

Podľa vety 3 z predchádzajúceho článku dostaneme

$$x \log_{10} 3 = \log_{10} 0{,}25$$

a odtiaľ

$$x = \frac{\log_{10} 0{,}25}{\log_{10} 3}$$

Skúška dosadením do danej rovnice je náročná, preto skúšku urobíme obrátením postupu. Overíme, že pre $x = \dfrac{\log_{10} 0{,}25}{\log_{10} 3}$ platí $2 + 3^x = 3^{x+2}$.
Ak

$$x = \frac{\log_{10} 0{,}25}{\log_{10} 3}$$

tak

$$x \log_{10} = \log_{10} 0{,}25$$

Na úpravu ľavej strany rovnice použijeme vetu 3 z článku 1.10:

$$\log_{10} 3^x = \log_{10} 0{,}25$$

Ak sa rovnajú logaritmy dvoch čísel, tak sa rovnajú i tieto čísla. Z poslednej rovnice teda dostaneme

$$3^x = 0{,}25$$

a ďalej

$$8 \,.\, 3^x = 2$$
$$3^2 \,.\, 3^x - 3^x = 2$$
$$2 + 3^x = 3^2 \,.\, 3^x$$
$$2 + 3^x = 3^{x+2}$$

Prichádzame k záveru: Množina P všetkých koreňov rovnice je jednoprvková:

$$P = \left\{\frac{\log_{10} 0{,}25}{\log_{10} 3}\right\}$$

Hodnotu $\dfrac{\log_{10} 0{,}25}{\log_{10} 3}$ približne určíme pomocou kalkulačky

$x \doteq -1{,}262$

(Môžeme však použiť aj hodnoty logaritmov z cvičenia 3 v článku 1.10.)

CVIČENIE

1. Určte všetky $x \in R$, pre ktoré platí:

a) $\log_4 x = 0{,}5 \,.\, \log_4 11$

b) $\log_{12} x = \log_{12} 5 + \log_{12} 4$

c) $\log_{0,5} x = \log_{0,5} 4 + \log_{0,5} \sqrt{7} - 0{,}5 \,.\, \log_{0,5} 1$

2. Riešte tieto rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $\log_{10}(x + 4) = \log_{10}(3x - 1)$

b) $\log_2(3 + x) = \log_2(x^2 - 17)$

c) $\log_5(4 - 3x) = 0$

d) $\log_9(x^2 - 1) = 1$

(Návod pre c): Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$ platí $\log_a 1 = 0$; návod pre d): pre každé $a \in R^+ - \{1\}$ platí $\log_a a = 1$.)

D.U **3.** Riešte rovnice s neznámou $y \in R$:

a) $\log_7(y + 3) - \log_7(y + 1) = \log_7(y - 3)$

b) $\log_2(y + 2) + \log_2(y + 14) = 6$

c) $2 - \log_{10} 5 = \log_{10} y$

4. Riešte tieto rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $(\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x - 10 = 0$

b) $(\log_5 x)^2 - 2 \log_5 x = -1$

5. Riešte tieto rovnice s neznámou $x \in R$ (použite substitučnú metódu):

a) $2^x = 100$ b) $5^{x-2} = \dfrac{10}{3}$ c) $5^{3-x} = 3^{2x-1}$

(Návod: Rovnice najskôr logaritmujte.)

+6. V laboratóriu je m_1 gramov rádioaktívnej látky s polčasom rozpadu T_1 minút a m_2 gramov látky s polčasom rozpadu T_2 minút ($m_1 > m_2$, $T_1 < T_2$). Za aký čas budú hmotnosti obidvoch látok rovnaké? Voľte špeciálne $m_1 = 0{,}4$, $m_2 = 0{,}1$, $T_1 = 19{,}7$, $T_2 = 26{,}8$.

+7. Riešte tieto rovnice s neznámou $u \in R^+$:

a) $u^{\log_{10} u - 1} = 100$ b) $u^{\sqrt{u}} = (\sqrt{u})^u$

(Návod: Rovnice najprv logaritmujte.)

1.12 Prirodzené a dekadické logaritmy

Uvažujme o grafe lineárnej funkcie $y = x + 1$, ktorý „zviera“ s osou x karteziánskej sústavy súradníc Oxy uhol 45° (pozri obr. 1.44). Hľadáme