$k \in R$, pre ktoré platí:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k = 3$$
$$3^{-k} = 3^1$$
$$k = -1$$

Teda $t(3) = -1$ čiže $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$.

(Dvojica $[3; -1]$ naozaj patrí funkcii $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, lebo dvojica $[-1; 3]$ patrí funkcii $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, ako sa môžeme ľahko presvedčiť, ak za x dosadíme číslo -1 a za y číslo 3: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$.)

Teraz vypočítame $t\left(\frac{1}{27}\right)$, t. j. nájdeme všetky také $k \in R$, pre ktoré platí:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{27}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$
$$k = 3$$

Teda $t\left(\frac{1}{27}\right) = 3$ čiže $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$.

Teraz uvažujme všeobecne o logaritmickej funkcii $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Určiť jej funkčnú hodnotu pre číslo s, t. j. **logaritmus čísla** s **pri základe** a znamená nájsť také číslo v, pre ktoré $a^v = s$.

$a^y = x$

! Logaritmus s pri základe a je teda také číslo v, pre ktoré platí: Ak ním umocníme číslo a, dostaneme s. Pritom $a \in R^+ - \{1\}$, $s \in R^+$:

$$\log_a s = v \text{ práve vtedy, keď } a^v = s \qquad (1)$$

Z týchto úvah ihneď vyplývajú tieto vety:

1. Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$ a pre každé $s \in R^+$ platí
$$s = a^{\log_a s}$$

Dôkaz: Stačí dosadiť do $a^v = s$ z (1) za v výraz $\log_a s$.

2. Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$ platí:
   a) $\log_a a = 1$
   b) $\log_a 1 = 0$

Dôkaz:

a) Podľa (1) znamená $\log_a a = 1$ to isté, ako $a^1 = a$ ($s = a$, $v = 1$).
b) $\log_a 1 = 0$ je to isté, ako $a^0 = 1$ ($s = 1$, $v = 0$).

Príklad 25

Určte a) $\log_7 49$, b) $\log_{10} \frac{1}{100}$.

Riešenie:

a) $\log_7 49 = v$ práve vtedy, keď $7^v = 49$; $7^v = 7^2$, $v = 2$; $\log_7 49 = 2$

b) $\log_{10} \frac{1}{100} = v$ práve vtedy, keď $10^v = \frac{1}{100}$, teda $10^v = 10^{-2}$, $v = -2$;

$$\log_{10} \frac{1}{100} = -2$$

Príklad 26

Vypočítajte všetky $t \in R$, pre ktoré platí $\log_6 t = 2$.

Riešenie: $\log_6 t = 2$ práve vtedy, keď $6^2 = t$. Odtiaľ $t = 36$.

Príklad 27

Určte všetky $a \in R^+ - \{1\}$, pre ktoré platí $\log_a 10\,000 = 4$.

Riešenie: $\log_a 10\,000 = 4$ práve vtedy, keď $a^4 = 10\,000$, teda $a^4 = 10^4$. Vzhľadom na to, že a musí byť kladné číslo, poslednému vzťahu vyhovuje iba $a = 10$.

5. a) Pre každé $a>1$ platí: Ak $x<1$, tak $\log_a x<0$; ak $x>1$, tak $\log_a x>0$.
   b) Pre každé $a\in(0;1)$ platí: Ak $x<1$, tak $\log_a x>0$; ak $x>1$, tak $\log_a x<0$.

CVIČENIE

1. Zostrojte grafy logaritmických funkcií $y=\log_4 x$, $y=\log_{10} x$, $y=\log_{0,4} x$, $y=\log_{0,8} x$.
2. Rozhodnite, ktoré z týchto tvrdení sú pravdivé; využite pritom vedomosti o priebehu logaritmických funkcií:

   a) $\log_2 5>0$ P   b) $\log_5 0{,}7\leqq 0$ P
   c) $\log_{0,1} 1=0$ P   d) $\log_4 11<\log_4 15$ P
   e) $\log_{0,7} 5\leqq\log_{0,7} 4$ ≠ P

3. Rozhodnite, ktoré z uvedených čísel sú záporné:

   a) $\log_5 0{,}5$ < 0   b) $\log_{0,5} 5$ < 0
   c) $\log_{0,5} 0{,}5$ > 0   d) $\log_5 5$ > 0

   (Návod: Využite vety 1 až 5.)
4. Určte všetky také $x\in R$, pre ktoré platí:

   a) $\log_{0,2} x=0$ b) $\log_3 x<0$
   c) $\log_3 x\geqq 0$ d) $\log_2 x<\log_2 4$
   e) $\log_{0,6} 5\leqq\log_{0,6} x$

5. Dokážte vety 4 a 5. (Návod: Pri dôkaze vety 5 použite vetu 3.)

1.9 Logaritmus

Príklad 23

Daná je logaritmická funkcia u: $y=\log_2 x$.

a) Vypíšte aspoň tri prvky, ktoré patria tejto funkcii.
b) Určte hodnotu funkcie u pre číslo 64.

Riešenie:

a) Využijeme tabuľku z riešenia príkladu 16 v článku 1.6, kde sú vypísané

niektoré prvky funkcie s: $y=2^x$. Napr. $[1;2]\in s$. Z definície logaritmickej funkcie vyplýva, že $[2;1]\in u$, teda $u(2)=1$ alebo $\log_2 2=1$. Podobne dostaneme:

$[-3;2^{-3}]\in s$, teda $[2^{-3};-3]\in u$, teda $u\left(\frac{1}{8}\right)=-3$, t. j. $\log_2\frac{1}{8}=-3$,

$\left[-0{,}5;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\in s$, teda $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};-0{,}5\right]\in u$, teda $u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-0{,}5$, t. j. $\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=-0{,}5$.

b) Na určenie hodnoty funkcie u pre číslo 64 nám tabuľka nepomôže. Uvedomme si však, že funkcii s: $y=2^x$ patria práve všetky dvojice $[m;2^m]$, pričom $m\in R$. Funkcii u: $y=\log_2 x$ patria teda práve všetky usporiadané dvojice $[2^m;m]$. Hľadáme všetky také $m\in R$, aby platilo $2^m=64$. Na to stačí vyriešiť exponenciálnu rovnicu

$2^m=64$ s neznámou $m\in R$
$2^m=2^6$
$m=6$

Teda $u(64)=6$, t. j. $\log_2 64=6$.
(Usporiadaná dvojica $[2^6;6]$, t. j. $[64;6]$, naozaj funkcii u patrí, lebo dvojica $[6;2^6]$ patrí funkcii s: $y=2^x$.)

Príklad 24

Určte hodnoty funkcie t: $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ pre čísla 3 a $\frac{1}{27}$.

Riešenie: Exponenciálnej funkcii $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ so základom $\frac{1}{3}$ patria všetky usporiadané dvojice $\left[k;\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]$, pričom $k\in R$. Preto sa logaritmická funkcia s rovnakým základom, t. j. $\frac{1}{3}$, skladá zo všetkých usporiadaných dvojíc $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^k;k\right]$, pričom $k\in R$. Určiť $t(3)$ znamená nájsť všetky také