

Príklady na integrovanie substitučnou metódou (dom. úloha4)

Príklad :

Vypočítajte integrály : a) $\int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$, b) $\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx$, c) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 4} dx$, d) $\int \frac{2e^{3x}}{3e^{3x} + 5} dx$,
 e) $\int \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx$, f) $\int \frac{-5}{x(3 - 5 \ln x)} dx$, g) $\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx$, h) $\int \frac{3x^4}{x^5 - 8} dx$, i) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$, j) $\int \frac{3^x}{1 + 3^x} dx$.

Úplným zovšeobecnením doterajšej substitučnej metódy je výpočet integrálov typu

$$\int F[f(x)] \cdot a \cdot f'(x) dx \quad \mathbf{a} \quad \int \frac{a \cdot f'(x)}{F[f(x)]} dx, \text{ ktoré riešime substitúciou } \left| \begin{array}{l} s: \quad t = f(x) \\ \quad \quad dt = f'(x) dx \end{array} \right|.$$

Príklad : $\int (3x+2) \sqrt[3]{(3x^2+4x-7)^2} dx = \left| \begin{array}{l} s: \quad t = 3x^2 + 4x - 7 \\ \quad \quad dt = (6x+4) dx \\ \quad \quad dt = 2(3x+2) dx \\ \quad \quad \frac{dt}{2} = (3x+2) dx \end{array} \right| = \int \sqrt[3]{t^2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{2}{3}} dt = \frac{3}{10} t^{\frac{5}{3}} + C =$
 $= \frac{3}{10} \sqrt[3]{(3x^2+4x-7)^5} + C.$

Príklad: $\int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \left| \begin{array}{l} s: \quad t = 1+x^2 \\ \quad \quad dt = 2x \cdot dx \\ \quad \quad \frac{dt}{2} = x \cdot dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^3} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{-3} dt = -\frac{1}{4t^2} + C = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + C.$

Príklad 1: Riešte integrály

a) $\int (x^2 - 5)^{45} \cdot 2x \cdot dx$, b) $\int (x^3 + 6)^{\frac{5}{3}} \cdot x^2 \cdot dx$, c) $\int 2x \sqrt{x^2 + 1} dx$, d) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 - 8} dx$, e) $\int \sin^7 x \cdot \cos x dx$,
 f) $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx$, g) $\int \cos x \sqrt{1 + 4 \sin x} dx$, h) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$, i) $\int \frac{\cot^4 x}{\sin^2 x} dx$, j) $\int x \cdot \sin x^2 dx$,
 k) $\int 2x \cos(x^2 + 1) dx$, l) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$, m) $\int e^x \cos e^x dx$, n) $\int x e^{x^2} dx$, o) $\int x^2 e^{-x^3} dx$, p) $\int e^{\sin x} \cos x dx$,
 r) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$, s) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\ln x} dx$, t) $\int e^x \sqrt{2 - 3e^x} dx$, u) $\int x \cdot \sin(x^2 + 4) dx$, v) $\int e^{x^2 + 4x + 5} (x + 2) dx$, w)
 $\int e^x \cot g e^x dx$.

Príklad 2 : Riešte integrály

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(8x^3 + 27)^2}} dx$, b) $\int \frac{x^4}{2\sqrt{4+x^5}} dx$, c) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} dx$, d) $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2 - 5x+6}} dx$, e) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$,
 f) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$, g) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$, h) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$, i) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+2 \cos x}} dx$, j) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} dx$.