Riešenie:

$$2\log_7(x-1)=0,5(\log_7 x^5-\log_7 x)$$
$$2\log_7(x-1)=0,5\left(\log_7 \frac{x^5}{x}\right) \qquad (1)$$
$$\log_7(x-1)^2=\log_7 x^{4\cdot 0,5} \qquad (2)$$
$$\log_7(x-1)^2=\log_7 x^2$$
$$(x-1)^2=x^2$$
$$x^2-2x+1=x^2$$
$$x=0,5$$

Skúška:

ľ$(0,5)=2\log_7(0,5-1)=\ldots$ $\log_7(x-1)$ je však definovaný len pre $x>1$, číslo 0,5 teda nie je koreňom danej rovnice.

Množina všetkých koreňov rovnice je prázdna.

Poznámka. Pri riešení rovnice sme urobili neekvivalentnú úpravu, a to pri prechode od rovnice (1) k rovnici (2): číslo 0,5 nie je koreňom rovnice (1), ale je koreňom rovnice (2); výraz $\log_7(x-1)^2$ má pre $x=0,5$ zmysel.

Rovnicu z príkladu 33 môžeme však riešiť ešte aj iným spôsobom. Rovnicu (1) upravíme postupne takto:

$$2\log_7(x-1)=0,5\log_7 x^4$$
$$2\log_7(x-1)=2\log_7 x$$
$$\log_7(x-1)=\log_7 x$$
$$x-1=x$$

Odtiaľ už vidieť, že nijaké reálne číslo nemôže byť koreňom danej rovnice.

Príklad 34

Riešte rovnicu $(\log_{10}x)^2+2\log_{10}x-3=0$ s neznámou $x\in R$.

Riešenie: Použijeme substitúciu

$$\log_{10}x=y \qquad (3)$$

a vyriešime kvadratickú rovnicu

$$y^2+2y-3=0$$

s neznámou $y\in R$:

$$D=b^2-4ac=2^2-4.1.(-3)=16$$
$$y_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}$$

Teda a) $y_1=1$, b) $y_2=-3$.

Za y dosadíme do (3) postupne čísla 1 a -3 a budeme riešiť získané logaritmické rovnice s neznámou $x\in R$:

a) $\log_{10}x=1$, $x=10$ b) $\log_{10}x=-3$, $x=10^{-3}$

Skúška:

a) ľ$(10)=(\log_{10}10)^2+2\log_{10}10-3=1+2-3=0$
p$(10)=0$
ľ$(10)=$ p(10)

b) ľ$(10^{-3})=(\log_{10}10^{-3})^2+2\log_{10}10^{-3}-3=(-3)^2+2(-3)-3=0$
p$(10^{-3})=0$
ľ$(10^{-3})=$ p(10^{-3})

Množina všetkých koreňov danej rovnice je $\{10;\ 10^{-3}\}$.

Príklad 35

Riešte rovnicu $2+3^x=3^{x+2}$ s neznámou $x\in R$.

Riešenie:

$$2+3^x=3^{x+2}$$
$$2+3^x=3^x.3^2$$
$$8.3^x=2$$
$$3^x=0,25$$

Od výrazov, ktoré tvoria jednotlivé strany poslednej rovnice, prejdeme k ich logaritmom pri základe 10; hovoríme, že rovnicu **logaritmujeme.** *

* Logaritmy so základom 10 volíme preto, lebo sú na kalkulačkách a dajú sa vypočítať aj pomocou logaritmických tabuliek a logaritmického pravítka.

CVIČENIE

2.C

2.A

1. Vypočítajte:

a) $\log_{10} 20 + \log_{10} 50$ b) $\log_{0,1} 20 - \log_{0,1} 0,2$

c) $\log_3 7 + \log_3 \frac{81}{7}$ d) $\log_5 50 - \log_5 2$

e) $\log_4 4^{-0,5}$ f) $\log_3 9^{2,5}$

2. Závislosť číselnej hodnoty p tlaku nasýtených vodných pár od číselnej hodnoty T absolútnej teploty vyjadruje vzťah $p = a \,.\, b^{\frac{T}{c+T}}$ (a, b, c sú kladné konštanty rôzne od 1). Vyjadrite, ako závisí T od p.

3. Vieme, že $\log_{10} 2 \doteq 0,301$, $\log_{10} 3 \doteq 0,477$, $\log_{10} 4 \doteq 0,602$, $\log_{10} 5 \doteq 0,699$, $\log_{10} 6 \doteq 0,778$, $\log_{10} 7 \doteq 0,845$, $\log_{10} 8 \doteq 0,903$, $\log_{10} 9 \doteq 0,954$.

Vypočítajte $\log_{10} \frac{5}{8}$, $\log_{10} 21$, $\log_{10} 16$, $\log_{10} 12$, $\log_{10} \sqrt[3]{14}$, $\log_{10} 0,2$, $\log_{10} 600$, $\log_{10} 0,0006$.

4. Rozhodnite, či platí veta: Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$ a pre všetky x, y z množiny R^+ platí $\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a y$.

+5. Dokážte vetu 2 z tohto článku.

+6. Dokážte tieto vety:

a) Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$ a pre každé $y \in R^+$ platí

$$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$$

b) Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$, pre každé $x \in R^+$ a pre každé n z množiny kladných celých čísel platí

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

1.11 Logaritmické a exponenciálne rovnice

Vety o logaritmoch, ktoré sme uviedli v predchádzajúcom článku, teraz využijeme pri riešení logaritmických rovníc. Budeme však potrebovať ešte túto vetu:

Pre každé kladné reálne číslo rôzne od 1 a pre všetky kladné reálne čísla x, y platí: Ak $\log_a x = \log_a y$, tak $x = y$.

Táto veta vyplýva ihneď z toho, že funkcia $y = \log_a x$ je rastúca pre $a \in 1$, klesajúca pre $a \in (0; 1)$. Prípad, že k dvom rôznym číslam by bol priradený ten istý logaritmus, nemôže nastať.

Príklad 32

Riešte rovnicu $\log_{10}(x + 2) - \log_{10}(x - 1) = 2 - \log_{10} 4$ s neznámou $x \in R$.

Riešenie: Najskôr vyjadríme číslo 2 z pravej strany rovnice v tvare logaritmu pri základe 10 a potom ľavú i pravú stranu rovnice upravíme podľa vety 2 z predchádzajúceho článku:

$$\log_{10}(x + 2) - \log_{10}(x - 1) = \log_{10} 100 - \log_{10} 4$$

$$\log_{10} \frac{x+2}{x-1} = \log_{10} \frac{100}{4}$$

Podľa vety uvedenej v úvode tohto článku ďalej dostaneme rovnicu

$$\frac{x+2}{x-1} = 25$$

ktorú už vieme riešiť:

$$x + 2 = 25x - 25$$
$$-24x = -27$$
$$x = \frac{9}{8}$$

Skúška:

$$\mathrm{l}\left(\frac{9}{8}\right) = \log_{10}\left(\frac{9}{8} + 2\right) - \log_{10}\left(\frac{9}{8} - 1\right) = \log_{10} \frac{25}{8} - \log_{10} \frac{1}{8} =$$

$$= \log_{10} \frac{\frac{25}{8}}{\frac{1}{8}} = \log_{10} 25$$

$$\mathrm{p}\left(\frac{9}{8}\right) = 2 - \log_{10} 4 = \log_{10} 100 - \log_{10} 4 = \log_{10} \frac{100}{4} = \log_{10} 25$$

$$\mathrm{l}\left(\frac{9}{8}\right) = \mathrm{p}\left(\frac{9}{8}\right)$$

Množina všetkých riešení danej rovnice je $\left\{\frac{9}{8}\right\}$.

Príklad 33

Riešte rovnicu $2 \log_7 (x - 1) = 0,5(\log_7 x^5 - \log_7 x)$ s neznámou $x \in R^+$.