Príklad 29

Vypočítajte $4 . \log_6 3 + 5 . \log_6 2 - \log_6 12$

Riešenie:

$4 . \log_6 3 + 5 . \log_6 2 - \log_6 12 =$ (podľa vety 3)
$= \log_6 3^4 + \log_6 2^5 - \log_6 12 =$ (podľa vety 1)
$= \log_6 (3^4 . 2^5) - \log_6 12 =$ (podľa vety 2)

$$= \log_6 \frac{3^4 . 2^5}{12} = \log_6 \frac{3^4 . 2^5}{2^2 . 3} = \log_6 216 = \log_6 6^3 =$$

$= 3$ (podľa definície logaritmu)

$4 . \log_6 3 + 5 . \log_6 2 - \log_6 12 = 3$

Príklad 30

Vypočítajte $\log_{10} 500$, ak viete, že $\log_{10} 5 \doteq 0{,}699$.

Riešenie:

$(\log_{10} 500 = \log_{10} (5 . 10^2) =$ (podľa vety 1)
$= \log_{10} 5 + \log_{10} 10^2 =$ (podľa definície logaritmu)

$= \log_{10} 5 + 2 \doteq 0{,}699 + 2 = 2{,}699$

$\log_{10} 500 \doteq 2{,}699$

Pri riešení príkladu vychádzame z toho, že každé kladné reálne číslo m sa dá písať v tvare $m = m_1 . 10^c$, pričom $m_1 \in \langle 1; 10)$ a c je isté celé číslo. Potom však

$$\log_{10} m = \log_{10} (m_1 . 10^c) = \log_{10} m_1 + \log_{10} 10^c = \\ = \log_{10} m_1 + c$$

Inak povedané, **logaritmus každého kladného čísla** m **pri základe 10 sa dá písať v tvare súčtu** $\log_{10} m_1$, **pričom** $m_1 \in \langle 1; 10)$, **a celého čísla** c. Pritom zrejme $\log_{10} m \in \langle 0; 1)$.

Príklad 31

Z m_0 gramov rádioaktívnej látky zostalo po t sekundách m gramov. Určte polčas rozpadu tejto látky.

Riešenie: Využijeme vzorec (*) z príkladu 20 článku 1.7:

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \qquad (*)$$

Našou úlohou je vyjadriť z tohto vzorca T. Výrazy na obidvoch stranách vzorca sú kladné čísla, teda existujú ich logaritmy. Môžeme písať

$$\log_{0,5} m = \log_{0,5} \left[m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \right] \qquad (1)$$

Logaritmus funkcie sme zvolili so základom 0,5 preto, že na pravej strane vzorca (*) sa vyskytuje mocnina čísla 0,5.

Teraz upravíme pravú stranu (1). Podľa vety 1 z tohto článku

$$\log_{0,5} \left[m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \right] = \log_{0,5} m_0 + \log_{0,5} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

(m_0 aj $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ sú kladné čísla, ich logaritmy teda existujú.) Podľa vety 3 z tohto článku ďalej platí:

$$\log_{0,5} m_0 + \log_{0,5} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \log_{0,5} m_0 + \frac{t}{T} \log_{0,5} \left(\frac{1}{2}\right)$$

Podľa definície logaritmu $\log_{0,5} \left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Vzťah (1) sa dá teda vyjadriť v tvare

$$\log_{0,5} m = \log_{0,5} m_0 + \frac{t}{T}$$

Odtiaľ dostaneme

$$\frac{t}{T} = \log_{0,5} m - \log_{0,5} m_0$$

a ďalej

$$T = \frac{t}{\log_{0,5} m - \log_{0,5} m_0}$$

Záver: Polčas rozpadu uvažovanej rádioaktívnej látky sa rovná

$$\frac{t}{\log_{0,5} m - \log_{0,5} m_0} \text{ sekundy.}$$

CVIČENIE

1. Dokážte, že platí $\log_5 5 = 1$, $\log_{10} 10\,000 = 4$, $\log_{0,5} 2 = -1$, $\log_9 1 = 0$, $\log_3 243 = 5$, $\log_{0,2} 125 = -3$.

2.c

2. Vypočítajte:

a) $\log_2 x$ pre $x = 2, 4, 8, 16, 32, 2, \sqrt[3]{4}$

b) $\log_{10} x$ pre $x = 1, 10, 100, 1\,000, 10^5, \frac{1}{1\,000}, 10^{-9}$

3. Vypočítajte:

a) $3^{\log_3 2}$ b) $10^{\log_{10} 10}$ c) $0,7^{\log_{0,7} 4}$

4. Určte všetky $x \in (0;\ +\infty)$, pre ktoré platí:

2.A

a) $\log_5 x = -1$, $\log_5 x = 0$, $\log_5 x = 3$, $\log_5 x = -3$, $\log_5 x = -\frac{1}{3}$

b) $\log_{10} x = 1$, $\log_{10} x = 6$, $\log_{10} x = -2$, $\log_{10} x = -0,5$

5. Určte všetky také $a \in R$, aby platilo:

a) $\log_a 25 = 2$ b) $\log_a 81 = 4$ c) $\log_a 8 = -3$

+6. Nájdite také celé číslo k, pre ktoré platí $k < \log_2 5 < k + 1$

1.10 Vety o logaritmoch

V tomto článku uvedieme niekoľko dôležitých viet o logaritmoch.

1. Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$ a pre všetky kladné reálne čísla x, y platí

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Logaritmus súčinu dvoch kladných čísel sa rovná súčtu logaritmov jednotlivých činiteľov.

2. Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$ a pre všetky kladné reálne čísla x, y platí

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Logaritmus podielu kladných čísel sa rovná rozdielu logaritmov delenca a deliteľa (v tomto poradí).

3. Pre každé $a \in R^+ - \{1\}$, pre všetky $y \in R$ a pre všetky $x \in R^+$ platí

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

Logaritmus mocniny kladného čísla sa rovná súčinu exponentu a logaritmu základu mocniny.

Na ukážku uvedieme dôkaz vety 1. Platí (pre všetky kladné čísla x, y a pre každé $a \in R^+ - \{1\}$):

$$x = a^{\log_a x} \qquad (1)$$

$$y = a^{\log_a y} \qquad (2)$$

$$x \cdot y = a^{\log_a (x \cdot y)} \qquad (3)$$

Z (1) a (2) dostaneme:

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y} \qquad (4)$$

Z (3) a (4) vyplýva:

$$a^{\log_a (x \cdot y)} = a^{\log_a x + \log_a y} \qquad (5)$$

Pre každé kladné reálne číslo a rôzne od 1 a pre všetky reálne čísla s, t platí: Ak $a^s = a^t$, tak $s = t$ (s touto vetou sme sa už stretli v úvode článku 1.7). Odtiaľ a z (5) už dostávame

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Tým sme vetu 1 dokázali.

Poznámka. Vetu 1 môžeme takto zovšeobecniť: Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo, a ľubovoľné kladné reálne číslo rôzne od 1, $x_1, \ldots, x_n$ ľubovoľné kladné reálne čísla. Potom

$$\log_a (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \ldots + \log_a x_n$$

Príklad 28

Vypočítajte $\log_{0,5} 6 + \log_{0,5} \frac{4}{6}$.

Riešenie: Podľa vety 1 o logaritme

$$\log_{0,5} 6 + \log_{0,5} \frac{4}{6} = \log_{0,5} \left(6 \cdot \frac{4}{6}\right)$$

Ďalej

$$\log_{0,5} \left(6 \cdot \frac{4}{6}\right) = \log_{0,5} 4 = -2$$

$(\log_{0,5} 4 = -2$, lebo $(0,5)^{-2} = 4)$